L'EVARISTE

Sujet matin

Durée : 2 heures

Les téléphones, tablettes, ordinateurs, montres connectées et tous appareils électroniques de communication ou de stockage, ainsi que les documents sont proscrits.

Les calculatrices sans mémoire type collège ou les calculatrices en mode examen sont autorisées.

La qualité de la rédaction est un facteur important d'appréciation des copies. L'humilité est la bienvenue à travers les raisonnements. Traitez les questions dans l'ordre que vous souhaitez.

Notations

Soit $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $k \leqslant n$. On rappelle que les **coefficients binomiaux** donnent le nombre de sous-ensembles à k éléments que l'on peut former à partir d'un ensemble contenant n éléments. On les note :

$$\binom{n}{k}$$

On admet que :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Avec $n!$ la factorielle de n, désignant le produit des n premiers entiers. On notera de plus $[\![1, n]\!]$ l'ensemble des entiers allant de 1 à n. On rappelle également que les sommes sont notées $\sum$. Aucune sanction ne sera prononcée si les sommes sont écrites « naïvement » dans votre copie. À titre d'exemple :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

I - Début du périple chez Eugène Charles Catalan

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit le n-ième nombre de Catalan par :

$$C_n := \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}$$

1. Calculer C_i pour tout $i \in [\![1, 6]\!]$.
2. a) Montrer que :

   $$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$$

   b) En déduire que $C_n \in \mathbb{N}$.
3. a) Montrer que :

   $$(n+2) \cdot C_{n+1} = 2(2n+1) \cdot C_n$$

   b) En déduire que $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.

   c) Démontrer par récurrence que $C_n \geqslant 2^{n-1}$, et en déduire $\lim\limits_{n\to\infty} C_n$.
4. a) Montrer que la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait la relation de récurrence suivante :

   $$C_0 = 1 \qquad \wedge \qquad \forall n \geqslant 0,\ C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$$

   b) En déduire que C_n est impair si et seulement si il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2^k - 1$.

II - Petit détour chez James Stirling

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeur dans $\mathbb{R}$. On dit que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **asymptotiquement équivalentes** si :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

Auquel cas, on note $a_n \underset{\infty}{\sim} b_n$.

Le but de cette partie est de démontrer de façon élémentaire l'équivalent asymptotique de Stirling :

$$\exists L \in \mathbb{R},\ \ n! \underset{\infty}{\sim} L\sqrt{n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la suite :

$$u_n := \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$$

1. Montrer que :

   $$\ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) = \frac{2n+1}{2} \cdot [\ln(n+1) - \ln(n)] - 1$$

2. On souhaite encadrer $K_n := \ln(n+1) - \ln(n)$.

   a) Justifier que K_n correspond à l'aire sous la courbe de la fonction f définie sur $[n, n+1]$ par :

   $$f : x \longmapsto \frac{1}{x}$$

   b) Tracer $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f sur $[n, n+1]$, le trapèze tangent à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $n + \frac{1}{2}$ ayant pour base $[n, n+1]$, ainsi que le trapèze dont les points de coordonnées sont :

   $\cdot\ (n, 0) \qquad \cdot\ (n+1, 0) \qquad \cdot\ \left(n, \frac{1}{n}\right) \qquad \cdot\ \left(n+1, \frac{1}{n+1}\right)$

   c) Montrer que :

   $$\frac{2}{2n+1} \leqslant K_n \leqslant \frac{2n+1}{2n(n+1)}$$

3. Déduire de ce qui précède que :

   $$0 \leqslant \ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \qquad (\star)$$

4. On pose $v_n := u_n e^{-\frac{1}{4n}}$.
   a) Justifier à l'aide de $(\star)$ que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   b) Montrer alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite, notée L.
5. Conclure que :
$$L\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n} \leqslant n! \leqslant L\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}e^{\frac{1}{4n}}$$
6. En déduire l'équivalent asymptotique de Stirling
7. En admettant que $L=\sqrt{2\pi}$, démontrer finalement que :
$$C_n \underset{\infty}{\sim} \frac{4^n}{n\sqrt{\pi n}}$$

III - Escale sympathique chez John Wallis

Le but de cette partie est de démontrer que L vaut bien $\sqrt{2\pi}$. Soit $k\in\mathbb{N}$. On définit :
$$W_k := \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{k}{2}}\,\mathrm{d}x$$
On définit de plus la fonction suivante :
$$g : x \longmapsto -\frac{x}{2}\cdot\frac{(1-x^2)^{\frac{k+2}{2}}}{\frac{k+2}{2}}$$

1. Que valent $g(0)$ et $g(1)$?
2. a) Déterminer W_0.
   b) Justifier que $W_1 = \dfrac{\pi}{4}$
3. a) Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g'(x) = (1-x^2)^{\frac{k}{2}} - (1-x^2)^{\frac{k}{2}+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{(1-x^2)^{\frac{k+2}{2}}}{\frac{k+2}{2}}$$
   b) En déduire que :
$$\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{k}{2}}\,\mathrm{d}x - \left(1+\frac{1}{k+2}\right)\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{k+2}{2}}\,\mathrm{d}x = 0$$
   c) Montrer qu'alors :
$$\frac{k+3}{k+2}W_{k+2} = W_k$$
   d) Conclure que :
$$W_{2k} = \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!} \qquad\qquad W_{2k-1} = \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\cdot\frac{\pi}{2}$$
   e) Justifier que :
$$0 \leqslant W_{2k} \leqslant W_{2k-1} \leqslant W_{2k-2}$$
   Puis que :
$$1 \leqslant \frac{W_{2k-1}}{W_{2k}} \leqslant \frac{W_{2k-2}}{W_{2k}}$$
   f) En déduire que :
$$\lim_{n\to\infty}\frac{W_{2k-1}}{W_{2k}} = 1$$
4. Déduire de tout ce qui précède que $L=\sqrt{2\pi}$.
   Indication : On pourra utiliser l'équivalent asymptotique de Stirling couplé au résultat précédent.

IV - Une fin déroutante

On pose ici :

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{C_k}$$

1. Démontrer que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \in \mathbb{R}_+$. On note $\mathcal{K}$ cette limite.
2. On rappelle que l'arctangente (notée arctan) est la réciproque de la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Autrement dit :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \arctan(\tan(x)) = \tan(\arctan(x)) = x$$

   a) Justifier que $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$.

   b) On admet que arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

   Démontrer que si u est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \arctan'(u(x)) = \frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$$

3. On admet que :

$$\mathcal{K} = \int_0^1 \frac{1+3x-3x^2}{(1-x+x^2)^3} \mathrm{d}x$$

   a) Justifier qu'une primitive de $h : x \longmapsto \frac{1+3x-3x^2}{(1-x+x^2)^3}$ est donnée par :

$$H : x \longmapsto \frac{1}{9}\left(\frac{3(2x-1)(x^2-x+3)}{(1-x+x^2)^2} + 4\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

   b) En déduire la tant attendue valeur de $\mathcal{K}$.

4. Démontrer que $\mathcal{K}$ est un nombre irrationnel.
   Indication : On admettra que π n'est racine d'aucun polynôme non nul à coefficients entiers.