Sujet matin

Durée : 2 heures

Les téléphones, tablettes, ordinateurs, montres connectées et tous appareils électroniques de communication ou de stockage, ainsi que les documents sont proscrits.

Les calculatrices sans mémoire type collège ou les calculatrices en mode examen sont autorisées.

La qualité de la rédaction est un facteur important d'appréciation des copies. L'humilité est la bienvenue à travers les raisonnements. Traitez les questions dans l'ordre que vous souhaitez.

Notations

Soit $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $k \leqslant n$. On rappelle que les **coefficients binomiaux** donnent le nombre de sous-ensembles à k éléments que l'on peut former à partir d'un ensemble contenant n éléments. On les note :

$$\binom{n}{k}$$

On admet que :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Avec $n!$ la factorielle de n, désignant le produit des n premiers entiers. On notera de plus $[\![1, n]\!]$ l'ensemble des entiers allant de 1 à n. On rappelle également que les sommes sont notées $\sum$. Aucune sanction ne sera prononcée si les sommes sont écrites « naïvement » dans votre copie. À titre d'exemple :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

I - Début du périple chez Eugène Charles Catalan

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit le n-ième nombre de Catalan par :

$$C_n := \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}$$

1. Calculer C_i pour tout $i \in [\![1,6]\!]$.

0.5pt/C_i

$C_1 = \frac{1}{1+1} \cdot \binom{2*1}{1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2!}{1!1!} = \frac{2}{2} = 1$

$C_2 = \frac{1}{3} \cdot \binom{4}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4!}{2!2!} = \frac{4}{2} = 2$

$C_3 = \frac{1}{4} \cdot \binom{6}{3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 5$

$C_4 = \frac{1}{5} \cdot \binom{8}{4} = \frac{1}{5} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 7 \cdot 2 = 14$

$C_5 = \frac{1}{6} \cdot \binom{10}{5} = \frac{1}{6} \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 3 \cdot 2 \cdot 7 = 42$

$C_6 = \frac{1}{7} \cdot \binom{12}{6} = \frac{1}{7} \cdot \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 11 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 132$

2. a) Montrer que :

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$$

.

2pts

$$\begin{aligned}
\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} &= \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} \\
&= \frac{(2n)!(n+1)}{n!(n+1)!} - \frac{(2n)!n}{(n+1)!n!} \\
&= \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} \\
&= \frac{1}{n+1} \frac{(2n)!}{n!n!} \\
&= \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = C_n
\end{aligned}$$

b) En déduire que $C_n \in \mathbb{N}$.

1pt - $C_n \in \mathbb{Z}$
1pt - $C_n > 0$

— $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$ so $\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = C_n \in \mathbb{Z}$

— $\frac{1}{n+1} > 0$ and $\binom{2n}{n} > 0$ so $\frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n} = C_n > 0$

Hence, $C_n \in \mathbb{N}$.

3. a) Montrer que :

$$(n+2) \cdot C_{n+1} = 2(2n+1) \cdot C_n$$

.

2pts

$$
\begin{aligned}
(n+2)\cdot C_{n+1} &= \frac{n+2}{n+1+1}\cdot\binom{2n+2}{n+1} \\
&= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \\
&= \frac{(2n+2)(2n+1)}{n+1}\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\frac{2n!}{n!n!} \\
&= 2(2n+1)\cdot C_n
\end{aligned}
$$

b) En déduire que $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.

2pts

From 3.a) : $C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2}C_n$, for $n \geq 1$, $2(2n+1) > n+2$, hence, (C_n) is a strictly increasing sequence.

c) Démontrer par récurrence que $C_n \geqslant 2^{n-1}$, et en déduire $\lim\limits_{n\to\infty} C_n$.

4pts induction
1pt limit

Init :
For $n = 1$: $C_n = 1$ and $2^{n-1} = 2^0 = 1$, hence $C_n \geq 2^{n-1}$

Induction :
Hypothesis : $C_n \geq 2^{n-1}$
Want : $C_{n+1} \geq 2^n$

Proof :
For $n \in \mathbb{N}$, $(2n+1) \geq n+2$ so $\frac{2(2n+1)}{n+2} \geq 2$; hence, $C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2}\cdot C_n \geq 2\cdot C_n = 2\cdot 2^{n-1} = 2^n$.

$\lim_{n\to+\infty} 2^{n-1} = +\infty$ so by growing comparison, $\lim_{n\to+\infty} C_n = +\infty$

4. a) Montrer que la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait la relation de récurrence suivante :

$$C_0 = 1 \text{ and } \forall n \geq 0,\ C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$$

8pts

b) En déduire que C_n est impair si et seulement si il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2^k - 1$.

8pts

II - Petit détour chez James Stirling

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeur dans $\mathbb{R}$. On dit que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **asymptotiquement équivalentes** si :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

Auquel cas, on note $a_n \underset{\infty}{\sim} b_n$.

Le but de cette partie est de démontrer de façon élémentaire l'équivalent asymptotique de Stirling :

$$\exists L \in \mathbb{R}, \quad n! \underset{\infty}{\sim} L\sqrt{n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la suite :

$$u_n := \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$$

1. Montrer que :

$$\ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) = \frac{2n+1}{2} \cdot [\ln(n+1) - \ln(n)] - 1.$$

2pts

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) &= \ln\left(\frac{\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}}{\frac{(n+1)!e^{n+1}}{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}}}\right) \\
&= \ln\left(\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}}{(n+1)!e^{n+1}}\right) \\
&= \ln\left(\left(\frac{(n+1)}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \cdot \frac{(n+1)}{(n+1)e}\right) \\
&= \left(n+\frac{1}{2}\right) \cdot \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln(e^{-1}) \\
&= \left(\frac{2n+1}{2}\right) \cdot [\ln(n+1) - \ln(n)] - 1
\end{aligned}$$

2. On souhaite encadrer $K_n := \ln(n+1) - \ln(n)$.

a) Justifier que K_n correspond à l'aire sous la courbe de la fonction f définie sur $[n, n+1]$ par :

$$f : x \longmapsto \frac{1}{x}.$$

1pt

By the fundamental theorem calculus :

$$\int_n^{n+1} f(x)dx = \ln(n+1) - \ln(n)$$

since $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

b) Tracer $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f sur $[n, n+1]$, le trapèze tangent à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $n + \frac{1}{2}$ ayant pour base $[n, n+1]$, ainsi que le trapèze dont les points de coordonnées sont :

$\cdot\ (n, 0) \qquad \cdot\ (n+1, 0) \qquad \cdot\ \left(n, \frac{1}{n}\right) \qquad \cdot\ \left(n+1, \frac{1}{n+1}\right)$

2pts

Use GeoGebra or Desmos (I will put a proper drawing later, maybe).

c) Montrer que :

$$\frac{2}{2n+1} \leqslant K_n \leqslant \frac{2n+1}{2n(n+1)}$$

.

4pts

- $\frac{2}{2n+1}$ correspond to the area of the trapeze tangent to $\mathcal{C}_f$ at $n+\frac{1}{2}$ with boundaries $y=0$, $x=n$ and $x=n+1$.

- K_n correspond to the area under $\mathcal{C}_f$ with boundaries $y=0$, $x=n$ and $x=n+1$.

- $\frac{2n+1}{2n(n+1)}$ correspond to the area of the trapeze defined by the 4 points $(n,0)$, $(n+1,0)$, $(n+1, f(n+1))$, $(n, f(n))$.

$f'(x)=\frac{1}{x}$ and $f''(x)=\frac{-1}{x^2}$, so $f''(x)<0 \forall x \in \mathbb{R}^*$, hence f is concave, which gives the inequality.

3. Déduire de ce qui précède que :

$$0 \leqslant \ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \qquad (\star)$$

4pts

From 2., we have :

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{2n+1} \leqslant K_n = \ln(n+1)-\ln(n) \leqslant \frac{2n+1}{2n(n+1)} \\
\iff \quad & \left(\frac{2n+1}{2}\right)\cdot\frac{2}{2n+1} \leqslant \left(\frac{2n+1}{2}\right)\cdot[\ln(n+1)-\ln(n)] \leqslant \left(\frac{2n+1}{2}\right)\cdot\frac{2n+1}{2n(n+1)} \\
\iff \quad & 1 \leqslant \left(\frac{2n+1}{2}\right)\cdot[\ln(n+1)-\ln(n)] \leqslant \frac{4n^2+4n+1}{4n^2+4n} \\
\iff \quad & 0 \leqslant \left(\frac{2n+1}{2}\right)\cdot[\ln(n+1)-\ln(n)] - 1 =^{\text{using 1}} \ln\left(\frac{u_n}{n+1}\right) \leqslant \frac{1}{4n^2+4n} \\
\iff \quad & 0 \leqslant \ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \qquad \text{(using 1.)}
\end{aligned}$$

4. On pose $v_n := u_n e^{-\frac{1}{4n}}$.
a) Justifier à l'aide de $(\star)$ que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

1pt u_n
2pts v_n

$$\begin{aligned}
& 0 \leqslant \ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) \\
\iff \quad & \ln(u_{n+1}) \leqslant \ln(u_n) \\
\iff \quad & u_{n+1} \leqslant u_n \\
\iff \quad & (u_n) \text{ decreases}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \\
\iff \quad & \ln\left(\frac{v_n e^{\frac{1}{4n}}}{v_{n+1}e^{\frac{1}{4(n+1)}}}\right) \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \\
\iff \quad & \ln\left(\frac{v_n}{v_{n+1}} \cdot e^{\frac{1}{4n}-\frac{1}{4(n+1)}}\right) \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \\
\iff \quad & \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\ln\left(\frac{v_n}{v_{n+1}}\right) \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \\
\iff \quad & \ln\left(\frac{v_n}{v_{n+1}}\right) \leqslant 1 \\
\iff \quad & \frac{v_n}{v_{n+1}} \leqslant 0 \\
\iff \quad & v_n \leqslant v_{n+1} \\
\iff \quad & (v_n) \text{ increases}
\end{aligned}
$$

b) Montrer alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite, notée L.

4pts

Since $u_n = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} > 0$ (as all terms are positive) and (u_n) decreases, (u_n) converges (say, to L).

Moreover, $\forall n > 1, u_n < u_1 = e$ as (u_n) decreases (so $L \in [0, e]$).

As $\forall n > 0, e^{-\frac{1}{4n}} < 1$, $v_n = u_n e^{-\frac{1}{4n}} < e$ and (v_n) increase, so (v_n) converges (say, to L').
Note that $v_n > 0$, so $L' \in [0, e]$ as well, and $v_n < u_n$ $\forall n > 0$, so $0 \leq L' \leq L \leq e$.

If $L = 0$, then $L' = 0$ and $L = L'$.
If $L > 0$, then $\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = \frac{L'}{L}$. Observe that $\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{1}{4n}} = 1$, so $\frac{L'}{L} = 1 \iff L' = L$.
Thus, in both cases, $L = L'$, so (u_n) and (v_n) converge to the same limit.

5. Conclure que :

$$L\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} \leqslant n! \leqslant L\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}e^{\frac{1}{4n}}.$$

2pts each side

Since (u_n) is a decreasing sequence converging to L, we have $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$
\begin{aligned}
& u_n \geq L \\
\iff \quad & \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \geq L \\
\iff \quad & n! \geq L\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n} \\
\iff \quad & n! \geq L\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}
\end{aligned}
$$

Since (v_n) is an increasing sequence converging to L, we have $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} & v_n \leq L \\ \iff \quad & \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{4n}} \leq L \\ \iff \quad & n! \leq L \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n} e^{\frac{1}{4n}} \\ \iff \quad & n! \leq L \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} e^{\frac{1}{4n}} \end{aligned}$$

6. En déduire l'équivalent asymptotique de Stirling.

4pts

Using 5., we have for all n natural :

$$\begin{aligned} & L\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} \leqslant \quad n! \quad \leqslant L\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} e^{\frac{1}{4n}} \\ \iff & \frac{L\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}{L\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} \leqslant \frac{n!}{L\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} \leqslant \frac{L\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} e^{\frac{1}{4n}}}{L\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} \end{aligned}$$

Of course :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{L\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}{L\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$$

and

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{L\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} e^{\frac{1}{4n}}}{L\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = \lim_{n \to +\infty} e^{\frac{1}{4n}} = 1$$

Hence, by the two policemen theorem (or "sandwich" theorem), we have :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{L\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$$

7. En admettant que $L = \sqrt{2\pi}$, démontrer finalement que :

$$C_n \underset{\infty}{\sim} \frac{4^n}{n\sqrt{\pi n}}$$

4pts

Using $n! \sim L\sqrt{n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$, hence, $(2n)! \sim L\sqrt{2n} \cdot \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n})$:

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \\ &= \frac{1}{n+1} \frac{(2n)!}{n!n!} \\ &= \frac{1}{n+1} \frac{L\sqrt{2n} \cdot \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{L^2 n \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} \\ &= \frac{1}{n+1} \frac{\sqrt{2} \cdot (2)^{2n}}{L\sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{n+1} \frac{4^n}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n} \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \end{aligned}$$

III - Escale sympathique chez John Wallis

Le but de cette partie est de démontrer que L vaut bien $\sqrt{2\pi}$. Soit $k \in \mathbb{N}$. On définit :

$$W_k := \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{k}{2}} \mathrm{d}x$$

On définit de plus la fonction suivante :

$$g : x \longmapsto -\frac{x}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^{\frac{k+2}{2}}}{\frac{k+2}{2}}$$

1. Que valent $g(0)$ et $g(1)$?

0.5pt $g(0)$
0.5pt $g(1)$

$$g(0) = 0 \text{ and } g(1) = 0$$

2. a) Déterminer W_0.

1pt

$$W_0 = \int_0^1 (1-x^2)^0 dx = \int_0^1 dx = 1$$

b) Justifier que $W_1 = \dfrac{\pi}{4}$.

4pts

$$W_1 = \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

let $x = \sin(u)$ so $\frac{dx}{du} = \cos(u)$

$$\begin{aligned} W_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(u)} \cos(u) du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u) du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2u)}{2} du \\ &= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} du + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2u) du\right] = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

As

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2u) du = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos(u) du = 0.$$

3. a) Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = (1-x^2)^{\frac{k}{2}} - (1-x^2)^{\frac{k}{2}+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^{\frac{k+2}{2}}}{\frac{k+2}{2}}$$

4pts

g is the combination of differentiable functions on $\mathbb{R}$, hence, it is itself differentiable on $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \left(-\frac{x}{2}\right) \cdot \left(\frac{(1-x^2)^{\frac{k+2}{2}}}{\frac{k+2}{2}}\right)' + \left(-\frac{x}{2}\right)' \cdot \left(\frac{(1-x^2)^{\frac{k+2}{2}}}{\frac{k+2}{2}}\right) \\
&= \left(-\frac{x}{2}\right) \cdot (1-x^2)^{\frac{k}{2}} \cdot (1-x^2)' - \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^{\frac{k+2}{2}}}{\frac{k+2}{2}} \\
&= \left(-\frac{x}{2}\right) \cdot (1-x^2)^{\frac{k}{2}} \cdot (-2x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^{\frac{k+2}{2}}}{\frac{k+2}{2}} \\
&= (1-x^2)^{\frac{k}{2}} \cdot (x^2) - \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^{\frac{k+2}{2}}}{\frac{k+2}{2}} \\
&= (1-x^2)^{\frac{k}{2}} \cdot [-(1-x^2)+1] - \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^{\frac{k+2}{2}}}{\frac{k+2}{2}} \\
&= (1-x^2)^{\frac{k}{2}} - (1-x^2)^{\frac{k}{2}+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^{\frac{k+2}{2}}}{\frac{k+2}{2}} \\
&= (1-x^2)^{\frac{k}{2}} - (1-x^2)^{\frac{k+2}{2}} \cdot \left[1 + \frac{1}{k+2}\right]
\end{aligned}$$

b) En déduire que :

$$\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{k}{2}}\,\mathrm{d}x - \left(1 + \frac{1}{k+2}\right) \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{k+2}{2}}\,\mathrm{d}x = 0$$

2pts

Using the fundamental theorem of Calculus :

$$\begin{aligned}
g(1) - g(0) &= \int_0^1 g'(x)dx \\
0 - 0 &= \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{k}{2}} - (1-x^2)^{\frac{k+2}{2}} \cdot \left[1 + \frac{1}{k+2}\right] dx \\
0 &= \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{k}{2}} dx - \left(1 + \frac{1}{k+2}\right) \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{k+2}{2}} dx
\end{aligned}$$

c) Montrer qu'alors :

$$\frac{k+3}{k+2} W_{k+2} = W_k$$

1pt

From b), recognizing the expressions for W_k and W_{k+2} :

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{k}{2}} dx - \left(1 + \frac{1}{k+2}\right) \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{k+2}{2}} dx \\
0 &= W_k - \left(1 + \frac{1}{k+2}\right) W_{k+2} \\
W_k &= \left(\frac{k+3}{k+2}\right) W_{k+2}
\end{aligned}$$

d) Conclure que :

$$W_{2k} = \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!} \qquad W_{2k-1} = \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

2pts each

By induction on even $n = 2k$: $W_0 = 1$ and $W_{k+2} = \frac{k+2}{k+3} W_k$, so :

$$W_{2k} = \prod_{i=1}^{k} \frac{2i}{2i+1} = \frac{\prod_{i=1}^{k} 2i}{\prod_{i=1}^{k} 2i+1} = \frac{2^k k!}{\prod_{i=1}^{k} 2i+1} = \frac{2^k k! \prod_{i=1}^{k} 2i}{(2k+1)!} = \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}$$

Note that $\prod_{i=1}^{k}(2i+1) = \frac{(2k+1)!}{2^k k!}$.

By induction on odd $n = 2k-1$: $W_1 = \frac{\pi}{4}$ and $W_{k+2} = \frac{k+2}{k+3} W_k$, so :

$$W_{2k-1} = \frac{\pi}{4} \cdot \prod_{i=1}^{k-1} \frac{2i+1}{2i+2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{k-1} 2i+1}{\prod_{i=0}^{k-1} 2i+2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}$$

Note that $\prod_{i=1}^{k-1}(2i+1) = \frac{(2k)!}{2^k k!}$.
e) Justifier que :

$$0 \leqslant W_{2k} \leqslant W_{2k-1} \leqslant W_{2k-2}$$

Puis que :

$$1 \leqslant \frac{W_{2k-1}}{W_{2k}} \leqslant \frac{W_{2k-2}}{W_{2k}}$$

4pts

On $x \in [0,1]$, we have $x^2 \in [0,1]$ and $1-x^2 \in [0,1]$. Morover, if $u \in [0,1]$ then $a > b$ implies $u^a < u^b$, so :

$$\begin{array}{lllll}
 & \frac{2k}{2} & > \frac{2k-1}{2} & > \frac{2k-2}{2} & \\
\implies 0 & \leq (1-x^2)^{\frac{2k}{2}} & < (1-x^2)^{\frac{2k-1}{2}} & < (1-x^2)^{\frac{2k-2}{2}} & \forall\ x \in [0,1] \\
\implies \int_0^1 0\ dx & \leq \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{2k}{2}} dx & \leq \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{2k-1}{2}} dx & \leq \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{2k-2}{2}} dx & \text{(integrating over } [0,1]) \\
\iff 0 & \leq W_{2k} & \leq W_{2k-1} & \leq W_{2k-2} & \text{(recognizing expression for } W_k) \\
\implies & 1 & \leq \frac{W_{2k-1}}{W_{2k}} & \leq \frac{W_{2k-2}}{W_{2k}} & \text{(dividing by } W_{2k})
\end{array}$$

f) En déduire que :

$$\lim_{k \to \infty} \frac{W_{2k-1}}{W_{2k}} = 1$$

1pt

From c), we have $\frac{W_{2k-2}}{W_{2k}} = \frac{2k+1}{2k} \to 1$ as $k \to +\infty$. Hence, by the two policemen theorem (or "sandwich" theorem), and e), we have the desired result.

4. Déduire de tout ce qui précède que $L = \sqrt{2\pi}$.
<u>Indication</u> : On pourra utiliser l'équivalent asymptotique de Stirling couplé au résultat précédent.

4pts

$$
\begin{aligned}
1 &= \lim_{k\to+\infty} \frac{W_{2k}}{W_{2k-1}} \\
&= \lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}}{\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\cdot\frac{\pi}{2}} \\
&= \lim_{k\to+\infty} \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}\cdot\frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k)!}\cdot\frac{2}{\pi} \\
&= \lim_{k\to+\infty} \frac{2^{4k}(k!)^4}{(2k+1)\cdot\left((2k)!\right)^2}\cdot\frac{2}{\pi} \\
&= \lim_{k\to+\infty} \frac{2^{4k}\left(L\sqrt{k}\left(\frac{k}{e}\right)^k\right)^4}{(2k+1)\cdot\left(L\sqrt{2k}\left(\frac{2k}{e}\right)^{2k}\right)^2}\cdot\frac{2}{\pi} \\
&= \lim_{k\to+\infty} \frac{2^{4k}L^4k^2\left(\frac{k}{e}\right)^{4k}}{(2k+1)\cdot L^2(2k)2^{4k}\left(\frac{k}{e}\right)^{4k}}\cdot\frac{2}{\pi} \\
&= L^2\lim_{k\to+\infty} \frac{k}{(2k+1)\pi}
\end{aligned}
$$

We know $\lim\limits_{k\to+\infty}\frac{k}{(2k+1)\pi} = \frac{1}{2\pi}$, hence, we have $L^2\cdot\frac{1}{2\pi} = 1$ thus $L = \sqrt{2\pi}$ (as $L > 0$).

IV - Une fin déroutante

On pose ici :

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{C_k}$$

1. Démontrer que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \in \mathbb{R}_+$. On note $\mathcal{K}$ cette limite.

2pts

From I-3.a), we have $C_n \geqslant 2^{n-1} \implies 0 \leqslant \frac{1}{C_n} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$. Hence, (S_n) increases. Moreover, $S_n \leqslant \sum_{k=0}^{n} 2^{k-1}$, and since $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} 2^{k-1} = 4$, $S_n \leqslant 4$, so (S_n) converges to $\mathcal{K} \in [0, 4]$.

2. On rappelle que l'arctangente (notée arctan) est la réciproque de la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Autrement dit :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \arctan(\tan(x)) = \tan(\arctan(x)) = x$$

a) Justifier que $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$.

1pt

$\tan(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sin(\frac{\pi}{6})}{\cos(\frac{\pi}{6})} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$ hence, $\arctan(\tan(\frac{\pi}{6})) = \arctan(\frac{1}{\sqrt{6}})$ so $\arctan(\frac{1}{\sqrt{6}}) = \frac{\pi}{6}$.

b) On admet que arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Démontrer que si u est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; \arctan'(u(x)) = \frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$$

1pt

Basic application of chain rule : $\arctan(u(x)) = \arctan'(u(x)) \cdot u'(x) = \frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$

3. On admet que :

$$\mathcal{K} = \int_0^1 \frac{1+3x-3x^2}{(1-x+x^2)^3} \mathrm{d}x$$

a) Justifier qu'une primitive de $h : x \longmapsto \dfrac{1+3x-3x^2}{(1-x+x^2)^3}$ est donnée par :

$$H : x \longmapsto \frac{1}{9}\left(\frac{3(2x-1)(x^2-x+3)}{(1-x+x^2)^2} + 4\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

8pts

I am not latex-ing those calculations.

<u>LeChat solution :</u>
We need to find $H'(x)$ and show that it equals $h(x)$.
First, let's differentiate $H(x)$:

$$H(x) = \frac{1}{9}\left(3(2x-1)(x^2-x+3)(1-x+x^2)^{-2} + 4\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

Using the product rule and chain rule, we get :

$$H'(x) = \frac{1}{9}\left(3 \cdot \frac{d}{dx}\left[(2x-1)(x^2-x+3)(1-x+x^2)^{-2}\right] + 4\sqrt{3} \cdot \frac{d}{dx}\left[\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right]\right)$$

Now, let's differentiate each term separately :
1. Differentiate $(2x-1)(x^2-x+3)(1-x+x^2)^{-2}$:
Using the product rule :

$$\frac{d}{dx}\left[(2x-1)(x^2-x+3)(1-x+x^2)^{-2}\right] = (2x-1)\cdot\frac{d}{dx}\left[(x^2-x+3)(1-x+x^2)^{-2}\right]+(x^2-x+3)(1-x+x^2)^{-2}\cdot\frac{d}{dx}[2x-1]$$

2. Differentiate $\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$:
Using the chain rule :

$$\frac{d}{dx}\left[\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right] = \frac{1}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Combining these results and simplifying, we should arrive at :

$$H'(x) = \frac{1+3x-3x^2}{(1-x+x^2)^3} = h(x)$$

Thus, $H(x)$ is indeed a primitive of $h(x)$.
b) En déduire la tant attendue valeur de $\mathcal{K}$.

4pts

$$\begin{aligned}
\mathcal{K} &= \int_0^1 h(x)dx \\
&= H(1) - H(0) \qquad \text{(fundamental theorem of calculus)} \\
&= \frac{1}{9}\cdot\left(\frac{3(2-1)(1-1+3)}{(1-1+1)^2} + 4\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2-1}{\sqrt{3}}\right)\right) - \frac{1}{9}\cdot\left(\frac{3(0-1)(0-0+3)}{(1-0+0)^2} + 4\sqrt{3}\arctan\left(\frac{0-1}{\sqrt{3}}\right)\right) \\
&= \frac{1}{9}\cdot\left(9 + 4\sqrt{3}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 9 - 4\sqrt{3}\arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)\right) \\
&= 2 + \frac{8\sqrt{3}}{9}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\
&= 2 + \frac{4\sqrt{3}}{9}\frac{\pi}{3} = 2 + \frac{\pi}{9\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

4. Démontrer que $\mathcal{K}$ est un nombre irrationnel.
Indication : On admettra que π n'est racine d'aucun polynôme non nul à coefficients entiers.

2pts

π is transcendent, while $9\sqrt{3}$ and 2 are algebraic numbers, hence, $\frac{\pi}{9\sqrt{3}}$ is transcendent, and $\mathcal{K}$ is transcendent as well. $\mathcal{K}$ being transcendent, it must be irrational.

ALBERT SCHOOL D E Shaw & Co