L'EVARISTE

Sujet matin

Durée : 2 heures

Les téléphones, tablettes, ordinateurs, montres connectées et tous appareils électroniques de communication ou de stockage, ainsi que les documents sont proscrits.

Les calculatrices sans mémoire type collège ou les calculatrices en mode examen sont autorisées.

La qualité de la rédaction est un facteur important d'appréciation des copies. L'humilité est la bienvenue à travers les raisonnements. Traitez les questions dans l'ordre que vous souhaitez.

Notations

Les notations suivantes seront utilisées dans l'énoncé. Vous êtes libres de les utiliser ou non.

On notera $\varnothing$ l'ensemble vide, $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non-nuls, et $[\![1,n]\!]$ l'ensemble fini des entiers allant de 1 à n. Si E est un ensemble, on note $\mathrm{Card}(E)$ le nombre d'éléments qu'il contient.

Dans la suite on pose, pour tout entier n, l'ensemble $\mathscr{D}_n$ des diviseurs positifs de n. On dira alors que d divise n si $d \in \mathscr{D}_n$, et on pourra noter $d|n$ la relation correspondante.

On rappelle également que les sommes sont notées $\sum$ et les produits sont notés $\prod$. Aucune sanction ne sera prononcée si les sommes ou produits sont écrits "naïvement" dans votre copie. A titre d'exemple :

$$\sum_{k=3}^{n-1} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^2} \quad ; \quad \prod_{k|27} k = 1 \times 3 \times 9 \times 27$$

I - Tomber de Möbius en Euler

Le but de cette partie est de démontrer la célèbre formule d'inversion de Möbius.

On considère μ la fonction de Möbius définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ (-1)^r & \text{si } n \text{ est le produit de } r \text{ nombres premiers distincts} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soient f, g deux fonctions de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{C}^*$. La formule d'inversion de Möbius assure que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(n) = \sum_{d|n} g(d) \implies \forall n \in \mathbb{N}^*,\ g(n) = \sum_{d|n} f(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right) \qquad (\star)$$

1. Donner les valeurs de $\mu(20)$, $\mu(42)$ et $\mu(69)$.

2. Montrer que, pour tout $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $\mathrm{pgcd}(m,n) = 1$, on a $\mu(mn) = \mu(m)\mu(n)$.

3.a. Décrivez l'ensemble $\mathscr{D}_{24}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $d, d' \in \mathscr{D}_n$. Justifier l'équivalence suivante :

$$d'|d \iff \frac{n}{d} \Big| \frac{n}{d'}$$

.

4.a. Supposons que $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ (décomposition en facteurs premiers de n) et $m = \prod_{i=1}^{r} p_i$. Justifier que :

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{d|m} \mu(d)$$

b. Justifier par un argument combinatoire que :

$$\sum_{d|m} \mu(d) = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-1)^i$$

c. En déduire que, pour tout $n \geqslant 2$:

$$\sum_{d|n} \mu(d) = 0$$

5. Prouvez ainsi la formule d'inversion de Möbius, notée $(\star)$.

6. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(n) = \prod_{d|n} g(d) \implies \forall n \in \mathbb{N}^*,\ g(n) = \prod_{d|n} f(d)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)} \qquad (\star\star)$$

On considère désormais φ l'indicatrice d'Euler définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$\varphi(n) = \text{Card}\,\{k \in [\![1, n]\!] \mid \text{pgcd}(k, n) = 1\}$$

Autrement dit, $\varphi(n)$ est le nombre d'entiers naturels premiers avec n qui sont strictement inférieurs à n.

7. Donner les valeurs de $\varphi(10)$ et $\varphi(23)$.

8. Justifier que p est premier si et seulement si $\varphi(p) = p - 1$.

9.a. Soit p premier, et $\alpha, k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\text{pgcd}(p^\alpha, k) \neq 1$ si et seulement si p divise k.

b. En déduire par un argument combinatoire que $\varphi(p^\alpha) = p^{\alpha-1}(p-1)$.

Nous admettons par la suite que : pour tout $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $\text{pgcd}(m, n) = 1$, $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.

10.a. Montrer que si $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ alors $\varphi(n) = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i - 1}(p_i - 1)$

b. En déduire la valeur de $\varphi(2024)$.

c. Déduire de ce qui précède que si $n \geqslant 3$ alors $\varphi(n)$ est pair.

II - Des polynômes coupant le cercle

Le but de cette partie est de s'intéresser aux polynômes cyclotomiques. A travers les propriétés de ces polynômes nous prouverons une version faible du théorème de progression arithmétique de Dirichlet.

Rappelons ici que i désigne l'unité imaginaire dont le carré vaut -1, et que $e^{i\pi} = -1$. On rappelle également que $\mathbb{U}_n = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid 1 \leqslant k \leqslant n\right\}$ est l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité, i.e l'ensemble des solutions de l'équation complexe $x^n = 1$.

Il sera également utile de se rappeler que l'exponentielle complexe vérifie la propriété d'additivité :

$$\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R},\ e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose, pour tout $x \in \mathbb{C}$:

$$\Phi_n(x) = \prod_{\substack{k=1 \\ \text{pgcd}(k,n)=1}}^{n} (x - e^{\frac{2ik\pi}{n}})$$

Et on appelle Φ_n le n-ième polynôme cyclotomique. On a par exemple :

$$\begin{aligned} \Phi_1(x) &= x - 1 \\ \Phi_2(x) &= x + 1 \\ \Phi_3(x) &= x^2 + x + 1 \end{aligned}$$

1. Que vaut $\Phi_4(x)$?

2.a Donner le degré de Φ_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b En déduire que, pour tout $n \geqslant 3$, Φ_n' (la dérivée de Φ_n restreint sur $\mathbb{R}$) admet au moins une racine réelle.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit d un diviseur de n. On pose $F_d = \{k \in [\![1, n]\!] \mid \text{pgcd}(k, n) = d\}$.

3.a. Montrer que $[\![1, n]\!] = \bigcup_{d|n} F_d$ et que, pour tout d, d' diviseurs de n tels que $d \neq d'$, on a $F_d \cap F_{d'} = \varnothing$.

b. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{C}$:

$$x^n - 1 = \prod_{k=1}^{n} (x - e^{\frac{2ik\pi}{n}})$$

c. Soit $x \in \mathbb{C}$. Pourquoi a-t-on :

$$\prod_{d|n} \Phi_d(x) = \prod_{d|n} \Phi_{\frac{n}{d}}(x)$$

d. Montrer alors que, pour tout $x \in \mathbb{C}$:

$$x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x) \qquad (\#)$$

e. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d)$$

4. Déduire alors par $(\star\star)$ et $(\#)$ que, pour tout $x \in \mathbb{C}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Phi_n(x) = \prod_{d|n} (x^d - 1)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)}$$

5. Donner alors une expression de $\Phi_8(x)$ et de $\Phi_{23}(x)$.

6. Plus généralement donner une expression de $\Phi_p(x)$ lorsque p est premier.

On va désormais prouver que Φ_n est un polynôme à coefficients entiers pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

7.a. Pourquoi le résultat est-il trivialement vrai pour $n = 1$?

b. En supposant le résultat vrai pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, montrer que le résultat est alors vrai pour n.

c. Conclure par un principe de récurrence.

Soit $a, n \in \mathbb{N}^*$. On admet que si p premier divise $\Phi_n(a)$ alors $p \equiv 0\ [n]$ ou $p \equiv 1\ [n]$. Nous allons déduire de ce résultat qu'il existe une infinité de nombres premiers p tels que $p \equiv 1\ [n]$.

8. Pourquoi le résultat est-il évident si $n = 1$ ou si $n = 2$?

Supposons par l'absurde qu'il en existe un nombre fini et notons les $p_1, \ldots, p_r$. On pose $a = np_1 \ldots p_r$.

9.a. Justifier que $\Phi_n(a) \in \mathbb{N}^*$.

b. Pourquoi a-t-on $\Phi_n(a) \equiv \Phi_n(0)$ $[a]$?

c. En déduire que $\Phi_n(a) \equiv \pm 1$ $[a]$.

d. Montrer que $\Phi_n(a) \geqslant 2$ pour tout $n \geqslant 2$.

e. Conclure.

Questions subsidiaires pour départager les plus chevronnés :

1. Expliquer pourquoi a-t-on pour tout $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $\mathrm{pgcd}(m, n) = 1$ l'égalité $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.

2. Montrer que si n est pair alors $\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(x^2)$.

3. Montrer que si n est impair alors $\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x)$.

Un mot à propos des sponsors de l'Évariste

D.E. Shaw & Co : Founded in 1988 over a small bookstore in downtown New York City, the D. E. Shaw group began with six employees and 28 million in capital and quickly became a pioneer in computational finance. In the early days of exposed pipes and extension cords, tripping on a cable could take out our whole trading system.

Today, we have more than 2,000 people around the globe and an institutional-grade (and trip-proof) infrastructure, but we still value creativity, entrepreneurship, and the spirit of discovery. We prize our culture of collaboration across disciplines, geographies, and investment strategies. Experienced leadership and diversely talented minds chart our course.

Analytical rigor, an open exploration of ideas, and a relentless pursuit of excellence drive us forward. We are dedicated to ensuring all employees—across gender identity, ethnicity, sexual orientation, religion, life experience, and more—feel welcome and empowered to do their best work at the D.E. Shaw group.

Nous remercions chaleureusement nos sponsors sans qui nous n'aurions pas pu inviter tant d'équipes à participer à cette première édition de l'Evariste !