L'EVARISTE

# Sujet après-midi

*Durée : 4 heures*

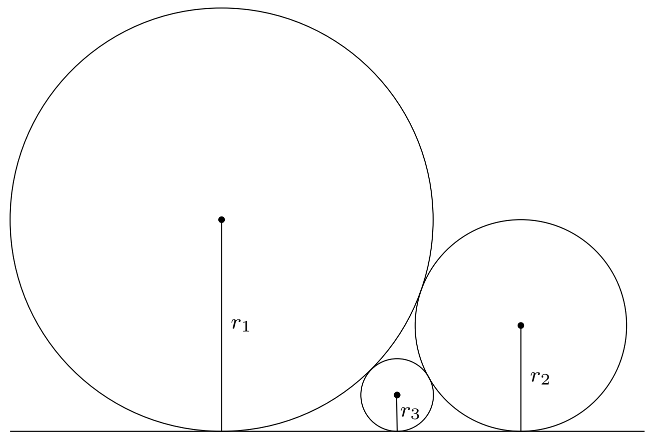
*Les téléphones, tablettes, ordinateurs, montres connectées et tous appareils électroniques de communication ou de stockage, ainsi que les documents sont proscrits.*

*Les calculatrices sans mémoire type collège ou les calculatrices en mode examen sont autorisées.*

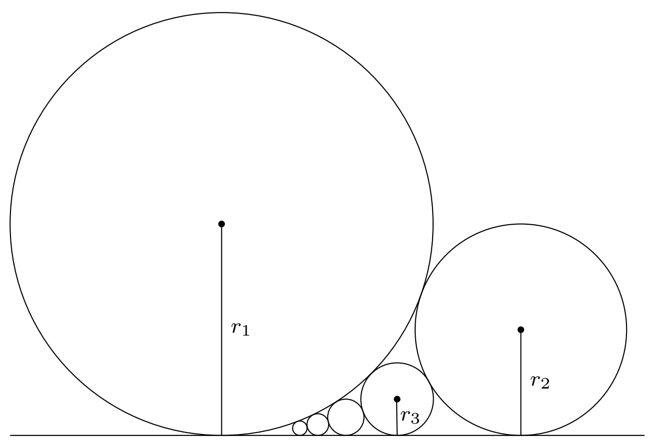
*La qualité de la rédaction est un facteur important d'appréciation des copies. L'humilité est la bienvenue à travers les raisonnements. Traitez les problèmes dans l'ordre que vous souhaitez.*

**Problème 1.** *(Sangaku généralisé)*

Au cœur de la préfecture de Gunma (Japon) est né en 1824 le sangaku[1] le plus célèbre : le problème des trois cercles tangents. Considérons une droite horizontale et trois cercles (de rayons respectifs $r_1$, $r_2$ et $r_3$) tangents deux à deux et configurés ainsi :




On décide ici d'ajouter un peu de complexité à cette configuration célèbre : pour tout $n \geqslant 3$, on construit le cercle de rayon $r_n$ tangent à la droite horizontale, au cercle de rayon $r_1$ et au cercle de rayon $r_{n-1}$. À titre d'exemple, voici un dessin représentant une configuration de 6 cercles :




1. Démontrer que :
$$\frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} = \frac{1}{\sqrt{r_3}}$$
2. Soit $n \geqslant 3$. Donner une expression de $r_n$ en fonction de $r_1$ et $r_2$.
3. En supposant que l'on trace une infinité de cercles par le procédé décrit précédemment, et en supposant $r_1 = 4$ et $r_2 = 1$, déduire de ce qui précède la valeur de la somme totale des aires.

   *Indication : On pourra librement utiliser la célèbre égalité[2] suivante :*
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}$$

1. Large panneau de bois que l'on accrochait devant un temple. Le panneau comportait un ou plusieurs problèmes de géométrie, illustrés par des figures de couleurs vives

2. Historiquement due à Euler qui a calculé $\zeta(2k)$ pour tout $k \geqslant 1$ à l'aide des polynômes de Bernoulli. À noter qu'avec l'arrivée de la théorie de Fourier, des méthodes plus expéditives ont été trouvées !

**Problème 2.** *(Percutant ou apathique ?)*

Beaucoup de nombres entiers peuvent se décomposer comme somme de deux (ou plus) entiers consécutifs strictement positifs :

$$\begin{aligned} 101 &= 50 + 51 \\ 21 &= 1+2+3+4+5+6 \\ 169 &= 7+8+9+10+11+12+13+14+15+16+17+18+19 \\ &\dots \end{aligned}$$

Un entier $n$ est dit **« apathique »** s'il ne peut pas s'écrire d'une telle façon. Autrement, on dira qu'il est **« percutant »**. Si la décomposition est unique, on dira qu'il est **« véritablement percutant »**.

1. Quels sont les nombres apathiques ?
2. Quel est le plus grand nombre véritablement percutant ?
3. Pour un entier percutant donné, combien existe-t-il de façons de le décomposer comme somme de deux (ou plus) entiers consécutifs strictement positifs ?
4. Donner toutes les décompositions de 1001 en tant que somme de deux (ou plus) entiers consécutifs.

   *Indication : La décomposition en facteurs premiers de* $1001$ *est* $7 \times 11 \times 13$.
5. Quel est le plus petit nombre qui peut être écrit comme la somme de deux (ou plus) entiers consécutifs strictement positifs d'exactement 1000 façons différentes ?

**Problème 3.**

Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit la suite suivante :

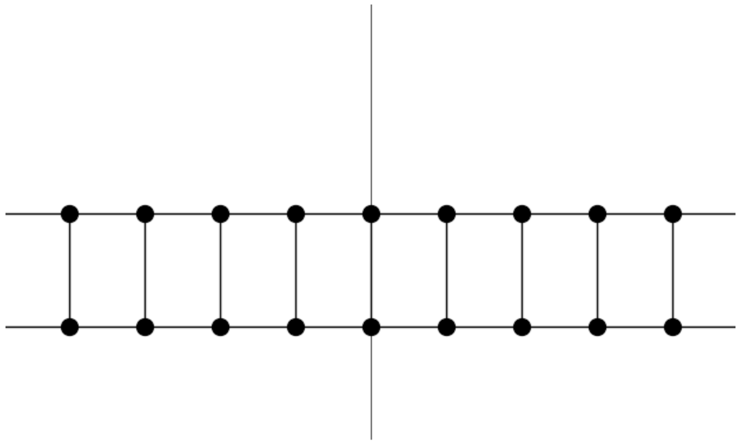
$$\begin{cases} u_0 = x \\ u_{n+1} = x^{u_n} \text{ si } n \geqslant 0 \end{cases}$$

Lorsque cette suite converge vers une limite réelle finie, on note $f(x)$ sa limite, définissant ainsi une fonction sur un ensemble de définition que l'on note $D_f$.

1. En admettant que $f$ est définie en $\sqrt{2}$, déterminer $f(\sqrt{2})$.
2. En admettant que $f$ est dérivable en $\sqrt{2}$, déterminer $f'(\sqrt{2})$.
3. Déterminer soigneusement l'ensemble de définition de $f$.

**Problème 4.** *(Inspiré par M. Duminil Copin)*

On considère l'ensemble des points à coordonnées **entières** du plan dont les ordonnées sont égales à 0 ou 1, plus communément appelé réseau $\mathbb{Z} \times \{0, 1\}$. De façon plus visuelle :



On note $c_n$ le nombre de chemins de taille $n$ partant de l'origine **qui ne s'auto-coupent pas**. On définit de plus $\mu$ la constante de connectivité du réseau par :

$$\mu := \lim_{n \to \infty} (c_n)^{\frac{1}{n}}$$

On admet que :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{c_{n+2}}{c_n} = \mu^2$$

On définit enfin $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite récurrente linéaire d'ordre 2 par :

$$F_0 = 0 \qquad \wedge \qquad F_1 = 1 \qquad \wedge \qquad \forall n \geqslant 2, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

1. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$ :

$$c_n = \begin{cases} 8F_n - n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 8F_n - 4 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

2. En déduire la valeur de $\mu$.