L'EVARISTE

Sujet après-midi

Durée : 4 heures

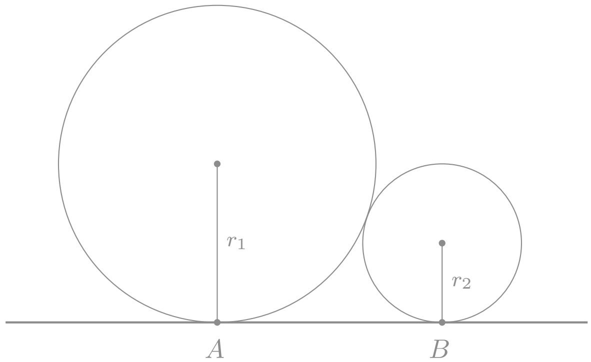
Les téléphones, tablettes, ordinateurs, montres connectées et tous appareils électroniques de communication ou de stockage, ainsi que les documents sont proscrits.

Les calculatrices sans mémoire type collège ou les calculatrices en mode examen sont autorisées.

La qualité de la rédaction est un facteur important d'appréciation des copies. L'humilité est la bienvenue à travers les raisonnements. Traitez les problèmes dans l'ordre que vous souhaitez.

Problème 1. *(Sangaku généralisé)*

<u>**1**</u>] Simplifions d'abord les choses. Partons du cas où nous avons seulement deux cercles, de rayons respectifs r_1 et r_2, et supposons arbitrairement $r_1 \geqslant r_2$. On note A et B les points de tangence respectifs à la droite horizontale. Ceci donne la figure suivante :



On va d'abord exprimer AB en fonction de r_1 et r_2. Le théorème de Pythagore assure que :

$$\begin{aligned} AB^2 &= (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 \\ &= 4r_1r_2 \end{aligned}$$

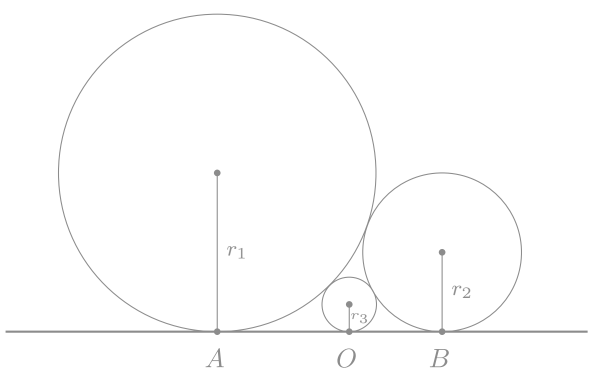
En outre $AB = 2\sqrt{r_1r_2}$.

Il est amusant de constater que ceci démontre de surcroît l'inégalité arithmético-géométrique. Effectivement, l'égalité ci-dessus assure que $AB^2 \leqslant (r_1 + r_2)^2$, en passant à la racine carrée et en divisant par 2 de chaque côté, on obtient :

$$\underbrace{\frac{AB}{2}}_{=\sqrt{r_1r_2}} \leqslant \frac{r_1 + r_2}{2}$$

Avec égalité si et seulement si $r_1 = r_2$, mais c'est une autre histoire ! C'est inutile pour notre périple.

On rajoute à la configuration précédente un petit cercle de rayon r_3 inscrit ainsi :



On se demande alors comment exprimer r_3 en fonction de r_1 et r_2. En notant O le point de tangence du petit cercle à la droite horizontale, on a en vertu de ce qui précède :

$$\begin{aligned} AO &= 2\sqrt{r_1r_3} \\ OB &= 2\sqrt{r_2r_3} \end{aligned}$$

Mais puisque $AB = AO + OB$, on a :

$$2\sqrt{r_1r_2} = 2\sqrt{r_1r_3} + 2\sqrt{r_2r_3}$$

En divisant finalement par $2\sqrt{r_1 r_2 r_3}$ de chaque côté, on obtient :

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}}$$

2] La relation précédente nous donne une piste intéressante pour trouver une expression de r_n (avec $n \geqslant 3$) dans la configuration plus générale dépeinte par l'énoncé du problème. Effectivement, on se rend compte que nous avons toujours le même type de configuration, et elles s'imbriquent toutes ! Ainsi :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{r_4}} &= \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_3}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \left(\frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}\right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{r_5}} &= \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_4}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \left(\frac{2}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}\right) \\
&= \frac{3}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{r_6}} &= \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_5}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \left(\frac{3}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}\right) \\
&= \frac{4}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \\
&\dots
\end{aligned}$$

Plus généralement, on peut prouver par une récurrence immédiate le prédicat suivant pour tout $n \geqslant 3$:

$$\mathcal{P}(n) \ : \ \frac{1}{\sqrt{r_n}} = \frac{(n-2)}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$$

C'est immédiat car le cas $n = 3$ a été traité et l'hérédité ne pose aucun problème. Cela assure ainsi :

$$\begin{aligned}
r_n &= \left(\frac{1}{\frac{(n-2)}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}}\right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{\frac{(n-2)\sqrt{r_2} + \sqrt{r_1}}{\sqrt{r_1 r_2}})}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\sqrt{r_1 r_2}}{(n-2)\sqrt{r_2} + \sqrt{r_1}})\right)^2 \\
&= \boxed{\frac{r_1 r_2}{\left[(n-2)\sqrt{r_2} + \sqrt{r_1}\right]^2}}
\end{aligned}$$

(À noter que la relation est trivialement vérifiée pour $n = 1$ ou $n = 2$.)

3] Soit $n \geqslant 1$. On note A_n l'aire du cercle de rayon r_n. On souhaite calculer la somme infinie suivante :

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$$

Pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned}
A_n &= \pi r_n^2 \\
&= \pi \left(\frac{4}{[(n-2)+2]^2} \right)^2 \\
&= \frac{16\pi}{n^4}
\end{aligned}$$

En outre :

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \\
&= 16\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \\
&= 16\pi \cdot \frac{\pi^4}{90} \\
&= \boxed{\frac{8\pi^5}{45}}
\end{aligned}$$

Problème 2. *(Percutant ou apathique ?)*

1. En faisant des tests sur les vingt premiers entiers, il semble que les puissances de 2 sont systématiquement apathiques. Nous allons démontrer la caractérisation suivante :

$$n \text{ est apathique} \iff \exists m \in \mathbb{N},\ n = 2^m$$

Établissons d'abord une caractérisation des nombres percutants. Supposons n percutant :

$$\begin{aligned}\exists k, i \in \mathbb{N}^*,\ n &= k + (k+1) + \cdots + (k+i)\\ &= (i+1)k + (1 + \cdots + i)\\ &= (i+1)k + \frac{i(i+1)}{2}\\ &= \frac{(2k+i)(i+1)}{2}\end{aligned}$$

Donc n est percutant si et seulement si il existe $k, i \in \mathbb{N}^*$ tels que $2n$ s'écrive $(2k+i)(i+1)$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que n est une puissance de 2. Dans ce cas, $2n$ est également une puissance de 2. Supposons par l'absurde que n est percutant : il existe $k, i \in \mathbb{N}^*$ tels que $2n = (2k+i)(i+1)$.

Mais $2k+i$ et $i+1$ étant de parité différente, le produit $(2k+i)(i+1)$ est une puissance de 2 si et seulement si $2k+i = 1$ ou $i+1 = 1$.

Dans le premier cas cela impose $k = 0$ et $i = 1$, d'où $n = 1$ (qui est trivialement apathique). Dans le second cas cela impose $i = 0$, d'où $n = k$, et n est encore une fois apathique (la seule décomposition est la décomposition triviale, qui ne remplit pas la condition de l'énoncé).
Dans tous les cas, on aboutit à un nombre qui ne peut être percutant, concluant notre raisonnement par l'absurde : il ne peut exister de décomposition valide lorsque n est une puissance de 2.

$\boxed{\Longrightarrow}$ On raisonne par contraposition pour prouver le sens direct. Supposons que n n'est pas une puissance de 2. On peut alors écrire $2n = pq$, avec p entier pair non-nul et q entier impair non-nul. Une disjonction de cas se présente alors pour déterminer i et k qui conviennent :

- Poser $i = q - 1$ et $k = \frac{p+1-q}{2}$ si $q < p + 1$.
- Poser $i = p - 1$ et $k = \frac{q+1-p}{2}$ si $q \geqslant p + 1$.

Dans les deux cas on en déduit une décomposition valide de n dépendant de p et q : n est percutant.

Exemple : Pour $n = 60$ on a $2n = 120 = 8 \times 15$, et on obtient $i = 7$, $k = 4$, d'où la décomposition :

$$60 = 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11$$

On aurait aussi pu dire que $2n = 120 = 24 \times 5$, et on obtient $i = 4$, $k = 10$, d'où la décomposition :

$$60 = 10 + 11 + 12 + 13 + 14$$

On aurait encore pu dire que $2n = 120 = 40 \times 3$, et on obtient $i = 2$, $k = 19$, d'où la décomposition :

$$60 = 19 + 20 + 21$$

Selon le choix de p et q, on obtient une décomposition unique par construction. Nous démontrerons à travers la question **3.** que ce sont d'ailleurs ici les seules décompositions valides.

2. Il n'y a pas de plus grand nombre véritablement percutant ! On va montrer que si p est un nombre premier impair alors il est véritablement percutant, ce qui permettra d'affirmer que l'ensemble des nombres percutants n'admet pas de borne supérieure en vertu de l'infinité des nombres premiers.

Soit p premier impair. Il est clair que p est percutant : p étant impair, il existe $j \in \mathbb{N}^*$ tel que $p = 2j + 1$, ainsi la décomposition $p = j + (j+1)$ est valide. Montrons maintenant que c'est la seule.

p étant percutant, la question précedente assure qu'il existe $k, i \in \mathbb{N}^*$ tels que $2p = (2k+i)(i+1)$, et alors deux cas se présentent :

• Si $i+1=2$ et $2k+i=p$ cela entraîne $i=1$ et $k=\frac{p-1}{2}$, donnant la décomposition $p=\frac{p-1}{2}+\frac{p+1}{2}$ qui correspond à celle évoquée plus haut.

• Si $i+1=p$ et $2k+i=2$ cela entraîne $i=p-1$ et $k=\frac{3-p}{2}$, donnant une décomposition invalide car $k\leq 0$.

On a bien montré que p était véritablement percutant. Mais alors si on suppose par l'absurde qu'il existe un plus grand nombre véritablement percutant, cela implique qu'il existerait un plus grand nombre premier impair, donc que l'ensemble des nombres premiers impairs serait fini ! C'est complètement absurde : il n'existe donc pas d'entier véritablement percutant plus grand que les autres.

3. Soit n percutant. En vertu de la construction établie en **1.**, il y a une correspondance unique entre chaque décomposition possible et le fait de choisir deux entiers p,q de parité opposée tels que $2n=pq$.

Supposons que $2n$ s'écrive $2^r s$ avec $r,s\in\mathbb{N}^*$ et s impair. Compter le nombre de décompositions possibles de l'entier n revient à déterminer le nombre de diviseurs positifs de s.

Effectivement, si d divise s ($\exists d'\in\mathbb{N}^*,\ s=dd'$), alors $2n=(2^r d')d$; en posant $p=2^r d'$ et $q=d$ on obtient une décomposition unique déterminée par d.

Afin de déterminer le nombre de diviseurs positifs de s, on le décompose en produit de facteurs premiers (ici nécessairement impairs) :

$$s=p_1^{\alpha_1}\dots p_t^{\alpha_t}$$

Pour construire un diviseur de s, on a α_1+1 choix pour l'exposant de p_1, α_2+1 choix pour l'exposant de p_2, etc ... L'entier s possède ainsi $(\alpha_1+1)\times\cdots\times(\alpha_t+1)$ diviseurs.

On supprime cependant la décomposition triviale (qui ne contient qu'un seul terme dans la somme). Il en résulte que si n s'écrit $2^{r-1}p_1^{\alpha_1}...p_t^{\alpha_t}$ alors il admet exactement

$$(\alpha_1+1)\times\cdots\times(\alpha_t+1)-1$$

décompositions en somme de deux (ou plus) entiers consécutifs. À noter que le résultat obtenu corrobore parfaitement les questions 1 et 2 (nous sommes rassurés).

4. On décompose d'abord 1001 en produit de facteurs premiers :

$$1001=7\times 11\times 13$$

Il y a donc sept façons de décomposer 1001 en somme de deux (ou plus) entiers consécutifs en vertu du dénombrement effectué précédemment.

On va utiliser les notations et formules établies en **1.** pour trouver ces décompositions. Étudions toutes les combinaisons $p,q\in\mathbb{N}^*$ tels que $2\times 1001=pq$.

• $p=2$ et $q=1001$ entraînent $i=1$ et $k=500$, on obtient : $\boxed{1001=500+501}$.
• $p=14$ et $q=143$ entraînent $i=13$ et $k=65$, on obtient : $\boxed{1001=65+\ldots+78}$.
• $p=22$ et $q=91$ entraînent $i=21$ et $k=35$, on obtient : $\boxed{1001=35+\ldots+56}$.
• $p=26$ et $q=77$ entraînent $i=25$ et $k=26$, on obtient : $\boxed{1001=26+\ldots+51}$.
• $p=154$ et $q=13$ entraînent $i=12$ et $k=71$, on obtient : $\boxed{1001=71+\ldots+83}$.
• $p=182$ et $q=11$ entraînent $i=10$ et $k=86$, on obtient : $\boxed{1001=86+\ldots+96}$.
• $p=286$ et $q=7$ entraînent $i=6$ et $k=140$, on obtient : $\boxed{1001=140+\ldots+146}$.

Autre méthode (si jamais les questions précédentes n'ont pas suscité d'inspiration) : On va commencer par recenser les décompositions avec un nombre **impair** de termes, qui seront de la forme :

$$\begin{aligned}1001&=(n-k)+\cdots+n+\cdots+(n+k)\\&=(2k+1)n\end{aligned}$$

Autrement dit, nous devons examiner les entiers $k\in\mathbb{N}$ tels que :

$$\frac{1001}{2k+1}=n$$

• Si $k=3$ on a $n=143$, en résulte la décomposition $1001 = 140 + \cdots + 146$.
• Si $k=5$ on a $n=91$, en résulte la décomposition $1001 = 86 + \cdots + 96$.
• Si $k=6$ on a $n=77$, en résulte la décomposition $1001 = 71 + \cdots + 83$.

On recense ensuite les décompositions avec un nombre **pair** de termes, qui seront de la forme :

$$\begin{aligned}1001 &= (n-(k-1)) + \cdots + n + \cdots + (n+k)\\ &= 2nk + k\\ &= (2n+1)k\end{aligned}$$

Autrement dit nous devons examiner les entiers $k \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\frac{1001}{k} = 2n+1$$

• Si $k=1$ on a $n=500$, en résulte la décomposition $1001 = 500 + 501$.
• Si $k=7$ on a $n=71$, en résulte la décomposition $1001 = 65 + \cdots + 78$.
• Si $k=11$ on a $n=45$, en résulte la décomposition $1001 = 35 + \cdots + 56$.
• Si $k=13$ on a $n=38$, en résulte la décomposition $1001 = 26 + \cdots + 51$.

Nous obtenons bien les sept décompositions possibles !

Remarque : Nous avons ici uniquement étudié les k « pertinents », étudier par exemple $k=77$ n'est pas cohérent avec les décompositions exigées par l'énoncé.

Avec $k=77$ on obtient $n=6$ et en découle la décomposition $1001 = -70 + \cdots + 83$ qui est certes correcte mais ne respecte pas la stricte positivité des facteurs impliqués imposée par l'énoncé !

Plus généralement si on veut le nombre de décomposition possible d'un entier $n = 2^r p_1^{\alpha_1} ... p_t^{\alpha_t}$ en tant que somme d'entiers **relatifs** consécutifs, on a

$$2(\alpha_1+1) \times \cdots \times (\alpha_t+1) - 1$$

décompositions possibles. Par exemple pour $15 = 3 \times 5$:

$$\begin{aligned}15 &= 7+8\\ &= 4+5+6\\ &= 1+2+3+4+5\\ &= -14+\cdots+15\\ &= -6+\cdots+8\\ &= -3+\cdots+6\end{aligned}$$

Soit la décomposition triviale, les trois décompositions respectant la condition de l'énoncé, et trois autres décompositions découlant des trois précédentes incluant des termes qui s'annulent (assez peu captivant).

---

5. On veut trouver le nombre minimal $n = 2^k p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$, avec p_i des premiers impairs et $k, p_1, \dots, p_r \in \mathbb{N}$ tel que :

$$(\alpha_1+1) \times \cdots \times (\alpha_r+1) - 1 = 1000$$

Autrement dit :

$$(\alpha_1+1) \times \cdots \times (\alpha_r+1) = 1001$$

Or $1001 = 7 \times 11 \times 13$, et pour assurer la minimalité du nombre cherché on va non seulement choisir les facteurs premiers impairs les plus petits possibles, mais aussi mettre les plus gros exposants sur les plus petits facteurs. Bien entendu, nous choisirons $k=0$! Nous obtenons :

$$\begin{aligned}n &= 3^{13-1} \times 5^{11-1} \times 7^{7-1}\\ &= 3^{12}5^{10}7^{6}\\ &\approx 6.105 \times 10^{17}\end{aligned}$$

Problème 3.

1.
On considère notre suite dans le cas particulier de notre question :

$$(u_0, u_1, u_2, \dots) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}^{\sqrt{2}}, \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}, \dots)$$

Nous allons montrer que cette suite est croissante et majorée, assurant conjointement qu'elle converge.

D'une part $u_0 < u_1$, et si on suppose $u_{n-1} < u_n$ alors par croissance de $x \longmapsto \sqrt{2}^x$ on a $\sqrt{2}^{u_{n-1}} < \sqrt{2}^{u_n}$, autrement dit $u_n < u_{n+1}$. On conclut par principe de récurrence quant à la croissance de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

D'autre part, elle est majorée par 2. On le montre aussi par récurrence immédiate : $u_0 < 2$ et si on suppose $u_n < 2$, alors par croissance de $x \longmapsto \sqrt{2}^x$ on a $\sqrt{2}^{u_n} < \sqrt{2}^2 = 2$, autrement dit $u_{n+1} < 2$ et on peut conclure par principe de récurrence.

Ceci permet d'affirmer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel L, qui vérifie $L = \sqrt{2}^L$. On pose alors $g : x \longmapsto L - \sqrt{2}^L$. On a $g'(x) = 1 - \ln(2) \cdot 2^{\frac{x}{2}-1}$, et $g''(x) = -\ln^2(2) \cdot 2^{\frac{x}{2}-2}$.

g est par conséquent concave (puisque g'' est négative) et admet donc au plus deux racines. Les racines sont de plus toutes deux évidentes : ce sont 2 et 4. Mais la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant majorée par 2, on trouve alors que $L = 2$. D'où :

$$f(\sqrt{2}) = 2$$

2. On évalue d'abord la dérivée de f. Soit x point en lequel f est dérivable. On a :

$$f(x) = x^{f(x)}$$

En passant au logarithme népérien de chaque côté :

$$\ln(f(x)) = f(x)\ln(x)$$

En dérivant de chaque côté :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f(x)}{x} + f'(x)\ln(x)$$

Donc :

$$f'(x) = \frac{f(x)^2}{x} + f'(x)f(x)\ln(x)$$

i.e :

$$f'(x) - f'(x)f(x)\ln(x) = \frac{f(x)^2}{x}$$

En factorisant par $f'(x)$:

$$f'(x)\left(1 - f(x)\ln(x)\right) = \frac{f(x)^2}{x}$$

Finalement :

$$\boxed{f'(x) = \frac{f(x)^2}{x\left(1 - f(x)\ln(x)\right)}}$$

On en déduit que :

$$\boxed{f'(\sqrt{2}) = \frac{2^2}{\sqrt{2}(1 - 2\ln(\sqrt{2}))} = \frac{2\sqrt{2}}{1 - \ln(2)} \approx 9.217}$$

3.
Dans cette question, on se réfère plusieurs fois à la fonction j, qui est étudiée un peu plus bas. Son étude découle naturellement de l'analyse ci-dessous.
Pour une introduction en douceur au théorème du point fixe, on pourra se référer à cet excellent article.

Analyse :

Supposons dans un premier temps que la suite converge, pour un réel x donné, vers un réel $f(x) = L$. Pour se simplifier la vie, on pose $h : t \longmapsto x^t$, de façon à pouvoir écrire $u_{n+1} = h(u_n)$.

Il est clair que h n'est pas bien définie si $x \leqslant 0$. Effectivement l'exponentiation avec une base négative et un exposant réel entraine généralement des valeurs complexes. On a alors $\boxed{x > 0}$.

D'après le théorème du point fixe, on a : $L = h(L)$. Donc $L = x^L$, d'où $\boxed{x = L^{\frac{1}{L}}}$. C'est là que l'étude de la fonction j fait naturellement son apparition.

De plus, pour que la suite converge, il faut que ce point fixe soit non-répulsif, c'est-à-dire : $-1 \leqslant h'(L) \leqslant 1$. Sinon, quand (u_n) s'approche trop de L, eh bien il s'en éloigne aussitôt !

On peut alors dériver h. Pour tout réel t, $h'(t) = \ln(x)x^t$.

Donc, $h'(L) = \ln(x)x^L = \ln(L^{\frac{1}{L}})L = \ln(L)$.
D'où finalement $\boxed{e^{-1} \leqslant L \leqslant e}$

La croissance de la fonction j sur $[e^{-1}; e]$ permet d'en déduire que $\boxed{e^{-e} \leqslant x \leqslant e^{1/e}}$

Synthèse :

L'auteur de ce problème a initialement pensé que le problème pouvait se résoudre avec la propriété fausse décrite ci-dessous. C'était aller un peu en vite en besogne. Le faux raisonnement est néanmoins présenté ici – à noter que les bornes obtenues sont correctes ! L'auteur ne se fout pas trop de vous quand même.

On considère $x \in [e^{-e}; e^{1/e}]$.

1. L'intervalle $[0, e]$ est stable par h
2. La monotonie de j assure que h admet un unique point fixe sur $[1, e]$
3. h est monotone (croissante si $x \geqslant 1$, et décroissante sinon)
4. $-1 \leqslant h'(L) \leqslant 1$ (vu dans l'analyse)

De plus, $x \in [0, e]$. L'application de la propriété ci-dessous permet alors de conclure.

Propriété sur la convergence des suites récurrentes :

Propriété (Fausse)

On considère une fonction h continue sur un intervalle $[a, b]$ et qui vérifie les conditions suivantes :

1. L'intervalle $[a, b]$ est stable par h
2. h admet un unique point fixe L
3. h est monotone sur l'intervalle $[a, b]$
4. $-1 \leqslant h'(L) \leqslant 1$

On considère une suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = c \in [a, b] \\ u_{n+1} = h(u_n) \text{ si } n \geqslant 0 \end{cases}$$

Alors la suite (u_n) converge vers l'unique point fixe L de h.

Dans le cas où h est décroissante, la propriété est malheuresuement fausse. Il peut il y avoir des mauvaises surprises. Considérez par exemple la fonction c définie sur $[-2, 2]$ par :

- $c(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{2} \text{ si } x \in [-2, -1] \\ -x^3 \text{ si } x \in [-1, 1] \\ \frac{-1-x}{2} \text{ si } x \in [1, 2] \end{cases}$

Cette fonction vérifie tous les critères et pourtant, avec $u_0 = 1.5$, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent respectivement vers 1 et -1.

Le cas où $x \in [e^{-e}, 1]$, et où donc h est décroissante est traité en détail sur ce lien. Les masochistes pourront consulter la démonstration, c'est formateur mais pas très digeste.

Etude de la fonction j

Il est donc naturel d'étudier :

$$j : x \longmapsto x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(x)}$$

j est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et sa dérivée est $j' : x \longmapsto \frac{1-\ln(x)}{x^2} x^{\frac{1}{x}}$, qui s'annule exclusivement en e.

x	0		e		∞
Signe de $j'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de j	0	↗	$e^{\frac{1}{e}}$	↘	0

Le maximum de j étant atteint en e et valant $e^{\frac{1}{e}}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut converger si $x > e^{\frac{1}{e}}$ (sinon cela contredirait le fait que $e^{\frac{1}{e}}$ est le maximum de j) . Maintenant puisque h est décroissante si $x < 1$ et croissante si $x > 1$ on va faire une disjonction de cas pour connaître borne sup' et borne inf'.

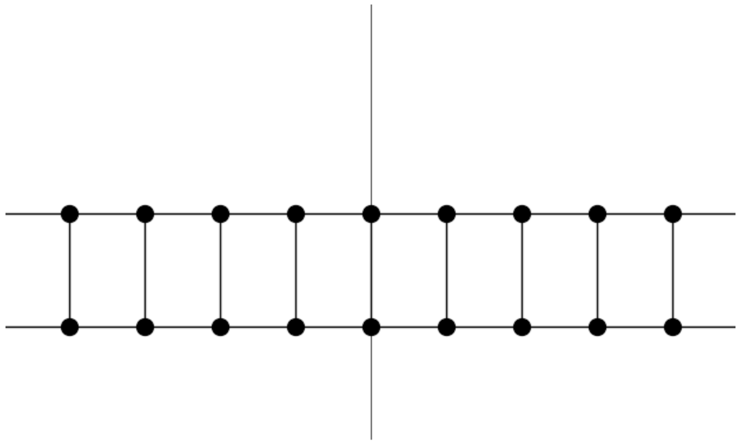
• Si $1 \leqslant x \leqslant e^{\frac{1}{e}}$ alors on démontre par une récurrence immédiate que la suite est majorée par e (si on suppose $u_n < e$ alors $u_{n+1} = x^{u_n} \leqslant e^{\frac{u_n}{e}} \leqslant e$) , étant croissante elle converge donc nécessairement.

• Si $e^{-e} \leqslant x < 1$ c'est nettement plus difficile, il faut étudier les suites extraites $(u_{2n})_{n\in}$ et $(u_{2n+1})_{n\in}$, respectivement croissante et décroissante. On montre par récurrence que $0 < u_{2n} < u_{2n+1} < 1$, ce qui assure que les suites extraites sont bornées, et leurs monotonies respectives permettent de dire qu'elles sont convergentes. Plus qu'à montrer qu'elles convergent vers la même limite pour avoir (en vertu du théorème des suites adjacentes) la convergence tant souhaitée de notre suite.

La suite du raisonnement est éreintante, les masochistes pourront consulter l'idée de la démonstration en suivant ce lien, c'est formateur mais pas très digeste.

Problème 4. *(Inspiré par M. Duminil Copin)*

On considère l'ensemble des points à coordonnées **entières** du plan dont les ordonnées sont égales à 0 ou 1, plus communément appelé réseau $\mathbb{Z} \times \{0, 1\}$. De façon plus visuelle :



On note c_n le nombre de chemins de taille n partant de l'origine **qui ne s'auto-coupent pas**. On définit de plus μ la constante de connectivité du réseau par :

$$\mu := \lim_{n \to \infty} (c_n)^{\frac{1}{n}}$$

On admet que :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{c_{n+2}}{c_n} = \mu^2$$

On définit enfin $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite récurrente linéaire d'ordre 2 par :

$$F_0 = 0 \qquad \wedge \qquad F_1 = 1 \qquad \wedge \qquad \forall n \geqslant 2, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

1. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$:

$$c_n = \begin{cases} 8F_n - n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 8F_n - 4 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

2. En déduire la valeur de μ.