L'EVARISTE

Sujet après-midi

Durée : 4 heures

Les téléphones, tablettes, ordinateurs, montres connectées et tous appareils électroniques de communication ou de stockage, ainsi que les documents sont proscrits.

Les calculatrices sans mémoire type collège ou les calculatrices en mode examen sont autorisées.

La qualité de la rédaction est un facteur important d'appréciation des copies. L'humilité est la bienvenue à travers les raisonnements. Traitez les problèmes dans l'ordre que vous souhaitez.

Problème 1.

Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose que $x^9 + y^9 = 2$. Montrer que :

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} \geqslant 2$$

Problème 2.

Considérons $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6 \in \mathbb{N}^*$. Soit $N = \sum_{i=1}^{6} k_i = k_1 + \cdots + k_6$.

On suppose que :
- N divise $k_1k_2k_3 + k_4k_5k_6$
- N divise $k_1k_2 + k_2k_3 + k_1k_3 - (k_4k_5 + k_5k_6 + k_4k_6)$

Montrer que N n'est jamais un nombre premier.

Problème 3.

Soient $m, n \in [\![1, 2024]\!]$. Supposons que $(n^2 - mn - m^2)^2 = 1$. Déterminer le maximum de $m^2 + n^3$.

En déduire un programme qui prend en argument $k \in \mathbb{N}^*$ et qui donne, sous la condition de l'équation diophantienne de l'énoncé, le max de $m^2 + n^3$ lorsque m, n appartiennent plus généralement à $[\![1, k]\!]$.

Problème 4.

Considérons un damier rectangulaire composé de $n \times p$ carrés, avec $n, p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$.

On colore certains de ces carrés en noir, de telle sorte que pour tout carré, au maximum 2 carrés adjacents sont colorés. Déterminer alors n et p tel que $n \times p$ soit le plus petit possible, et qu'il soit possible de colorer 2024 carrés en noir.

Jane Street® D E Shaw & Co