



L'ÉVARISTE

SUJET 0

Durée : 4 heures

Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs, montres connectées et tous appareils électroniques de communication ou de stockage, ainsi que les documents sont proscrits.

La qualité de la rédaction est un facteur important d'appréciation des copies. L'humilité est la bienvenue à travers les raisonnements. Chaque problème est noté sur 6 points.

Problème 1.

Déterminer le plus grand nombre entier possible qui est le produit d'entiers positifs dont la somme vaut 2023. Qu'en est-il si l'on considère plutôt un produit d'entiers relatifs ? Un produit de réels positifs ?

Problème 2.

Montrer qu'il n'existe aucune application $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $f(f(n)) = n + 2023$. Ce problème aurait-il eu sa place en 2024 ?

Problème 3.

Vous êtes un ingénieur chargé de tester la résistance du verre. Vous disposez de k échantillons de verre identiques et d'une machine de test capable de générer une force d'impact allant du niveau de puissance 1 au niveau P .

- Si, lors d'un essai, un échantillon est soumis à un certain niveau de puissance et ne se casse pas, il est intact et peut être testé à nouveau.
- Si, lors d'un essai, un échantillon se casse, il est définitivement inutilisable.
- Si, lors d'un essai, un échantillon se casse à un niveau de puissance m ($m \leq P$), il se casserait également lors de tout essai à un niveau de puissance supérieur à m .
- Si, lors d'un essai, un échantillon résiste à un niveau de puissance m , il résistera également lors de tout essai à un niveau de puissance inférieur à m .

Question : Avec k échantillons et n essais, jusqu'à quelle puissance maximale P_{max} peut-on tester ?

Problème 4.

Soit n un entier naturel. Montrer qu'il existe $2023n^3 + 42n^2 + 57$ entiers naturels consécutifs dont aucun n'est la puissance d'un nombre premier.