Sujet 0

Durée : 4 heures

Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs, montres connectées et tous appareils électroniques de communication ou de stockage, ainsi que les documents sont proscrits.

La qualité de la rédaction est un facteur important d'appréciation des copies. L'humilité est la bienvenue à travers les raisonnements. Chaque problème est noté sur 6 points.

Problème 1 : Déterminer le plus grand nombre possible en tant que produit d'entiers positifs dont la somme vaut exactement 2023.

Ébauche de corrigé :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche un n-uplet $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{N}^*)$ dont le produit est maximal et tel que :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = 2023$$

Ce n-uplet maximal existe dans la mesure où le nombre de n-uplets vérifiant une telle contrainte est fini. Soit alors $i \in [\![1, n]\!]$.

• Si $x_i = 1$ alors on ne gagne rien, la somme s'incrémente de 1 mais le produit ne bouge pas. Effectivement si un n-uplet contenant x_i était maximal on aurait en particulier, pour tout $j \neq i$, $x_i x_j = x_j < (x_i + x_j)$, et il suffirait alors de considérer le $(n-1)$-uplet remplaçant les composantes x_i et x_j par la composante $x_i + x_j$, et ça contredirait la maximalité présumée du produit. C'est ainsi un choix déraisonnable de prendre une des composantes du n-uplet égale à 1.

• Si $x_i = 4$ on peut tout autant mettre des 2 à la place puisque $4 = 2 + 2 = 2 \times 2$, cela ne change rien, on peut donc supposer que le n-uplet ne contient aucun 4.

• Si $x_i \geqslant 5$ alors on a $x_i < 2x_i - 4 = 2(x_i - 2)$. Un n-uplet contenant une composante égale à 5 ne peut donc être maximal, car le $(n+1)$-uplet dont la composante x_i est remplacée par 2 et $x_i - 2$ donnerait un produit plus grand.

Par ces disjonctions on a montré que si l'on voulait maximiser le n-uplet alors on ne devait prendre que des 2 et des 3. Reste à savoir qui est le plus "puissant". Pour cela il suffit de remarquer que $2 + 2 + 2 = 3 + 3$, mais $2^3 = 8 < 9 = 3^2$. Donc 3 a "plus de poids" que 2 dans le produit si l'on veut respecter la contrainte.

Par ailleurs, $2023 = 674 \times 3 + 1$. Mais on a vu que 1 ne convenait pas pour maximiser le produit. On écrit donc $2023 = 673 \times 3 + 4 = 673 \times 3 + 2 + 2$. Le maximum recherché est alors $3^{673} \times 2^2$.

Question subsidiaire : Et si on considère plutôt un produit de réels positifs, peut-on dépasser ce maximum engendré par un produit d'entiers ?

Réponse courte : Oui !

$3^{673} \times 2^2$ est environ égal à $5,066 \times 10^{321}$, tandis que $e^{744} \times (2023 - 744e)$ est environ égal à $7,799 \times 10^{322}$. On pourrait se dire que prendre plusieurs e pour maximiser le produit est complètement ubuesque, cependant c'est un choix parfaitement adapté !

Cela provient de l'étude de la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = x^{\frac{2023}{x}} = e^{\frac{2023}{x}\ln(x)}$$

Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et la dérivée est :

$$f' : x \longmapsto \left(\frac{2023(1-\ln(x))}{x^2}\right) x^{\frac{2023}{x}}$$

Elle s'annule exclusivement en e, on a donc un maximum atteint en cette valeur, qui vaut $f(e) = e^{\frac{2023}{e}}$.

On réalise un tableau de variation pour vérifier que c'est bien un max et pas un min. Observons que :

$$\left[\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) > 0\right] \ \wedge\ \lim_{x\to 0} f(x) = 1 \ \wedge\ \lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \ \wedge\ f(e) > 1$$

x	0		e		∞
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	1	$\nearrow$	1.62×10^{323}	$\searrow$	0

Or on veut un n-uplet, avec $n \in \mathbb{N}^*$; prendre un $\frac{2023}{e}$-uplet n'aurait pas de sens. On va donc choisir un $\left\lfloor \frac{2023}{e} \right\rfloor = 744$-uplet. De plus si l'on veut le n-uplet maximal, il faut choisir des composantes identiques.

Effectivement si vous supposez par l'absurde que le produit engendré est maximal ET que vous avez deux composantes différentes a et b, alors changer les deux composantes a et b par leur moyenne arithmétique $\frac{a+b}{2}$ engendre un produit plus gros en vertu de l'inégalité arithmetico-géométrique. Cela contredit donc la maximalité présumée du produit engendré.

Il faut ainsi prendre le 744-uplet suivant :

$$\left(\frac{2023}{744}, \dots, \frac{2023}{744}\right)$$

Afin de maximiser le produit avec des réels sous contrainte de la somme.

Problème 2 :

Montrer qu'il n'existe aucune application $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(f(n)) = n + 2023$$

Ébauche de corrigé :

Supposons par l'absurde l'existence d'une telle application. On a alors :

$$f(n+2023) = f(f(f(n))) = f(n) + 2023$$

On a donc, par une récurrence immédiate :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N},\ f(n+2023k) = f(n) + 2023k$$

L'intuition consiste ensuite à regarder modulo 2023 ! Effectivement modulo 2023 on se retrouve avec une involution : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $f(f(n)) \equiv n\ [2023]$.

Nous rappelons que toute involution dans un ensemble de cardinal impair (ici $\mathbb{Z} \setminus 2023\mathbb{Z}$) possède nécessairement au moins un point fixe. C'est lui qui va nous donner une contradiction.

(En effet soit E un ensemble fini de cardinal n, si on suppose que f n'admet aucun point fixe, i.e que pour tout $x \in E$ on a $f(x) \neq x$, alors les orbites de E seront nécessairement des couples d'éléments de la forme $(\alpha, f(\alpha))$ avec $\alpha \in E$ qui vont partitionner E tout entier car f est bijective ($f = f^{-1}$).

Ainsi on aura k couples distincts, donc $2k$ éléments distincts dans E, il suit alors que $n = 2k$. Donc si une involution f n'admet aucun point fixe sur E alors $\mathrm{Card}(E)$ est pair. Par contraposition on a bien que si le cardinal de E est impair alors f admet au moins un point fixe.)

Soit alors n_0 un point fixe de f modulo 2023. Il existe donc $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $f(n_0) = n_0 + 2023k_0$. Ainsi :

$$\begin{aligned} n_0 + 2023 &= f(f(n_0)) \\ &= f(n_0 + 2023k_0) \\ &= f(n_0) + 2023k_0 \\ &= n_0 + 2 \times 2023k_0 \end{aligned}$$

Cela entraîne $2k_0 = 1$. C'est absurde car $k_0 \in \mathbb{N}$.

Autre possibilité :

Supposons l'existence d'une telle application f. On constate d'abord que f est une application injective.

En effet : $\forall m, n \in \mathbb{N},\ f(m) = f(n) \implies f(f(m)) = f(f(n))$
$\implies m + 2023 = n + 2023$
$\implies m = n.$

On pose ensuite $A = f(\mathbb{N})$ et $B = f(f(\mathbb{N})) = \{n + 2023 \mid n \in \mathbb{N}\}$. On a, par construction, $B \subset A \subset \mathbb{N}$. On a alors $f : \mathbb{N} \setminus A \longrightarrow A \setminus B$ bijective (injective par les raisons qui précèdent, et surjective car si $z \in A \setminus B$, alors il existe $y \in \mathbb{N}$ tel que $z = f(y)$ et $z \notin f(f(\mathbb{N}))$.

Si on suppose par l'absurde que $y \in A$ alors il existe $x \in \mathbb{N}$ tel que $y = f(x)$. On aurait alors $z = f(f(x))$, absurde. Nécessairement $y \in \mathbb{N} \setminus A$ et on a bien surjectivité).

A noter que c'est une bijection entre deux ensembles disjoints (faire un dessin) et finis, ils sont donc de même taille. D'où $\mathbb{N} \setminus B = (\mathbb{N} \setminus A) \cup (A \setminus B)$ est de cardinal pair. Mais pourtant $\mathrm{Card}(\mathbb{N} \setminus B) = \mathrm{Card}([\![0, 2022]\!]) = 2023$. C'est absurde encore une fois.

Question subsidiaire :

Et si on avait imposé plutôt $f(f(n)) = n + 2024$, aurait-on eu la même impossibilité ?

Réponse :

Clairement pas, il suffit de considérer $f : n \longmapsto n + 1012$, et on aura bien :

$$f(f(n)) = f(n + 1012) = n + 1012 + 1012 = n + 2024$$

De façon générale si l'on veut que la condition $f(f(n)) = n + k$ tel que k est pair (i.e : $\exists k' \in \mathbb{N}$, $k = 2k'$) soit vérifiée alors il suffit de poser $f : n \longmapsto n + k'$.

En revanche dès lors que k est impair on se retrouve dans une impasse, et il suffira de suivre le raisonnement plus haut, analogue pour tout entier impair.

Problème 3.

Vous êtes un ingénieur chargé de tester la résistance du verre. Vous disposez de k échantillons de verre identiques et d'une machine de test capable de générer une force d'impact allant du niveau de puissance 1 au niveau P.

— Si, lors d'un essai, un échantillon est soumis à un certain niveau de puissance et ne se casse pas, il est intact et peut être testé à nouveau.
— Si, lors d'un essai, un échantillon se casse, il est définitivement inutilisable.
— Si, lors d'un essai, un échantillon se casse à un niveau de puissance m ($m \leq P$), il se casserait également lors de tout essai à un niveau de puissance supérieur à m.
— Si, lors d'un essai, un échantillon résiste à un niveau de puissance m, il résistera également lors de tout essai à un niveau de puissance inférieur à m.

Votre but est de déterminer la puissance P_{lim} à partir de laquelle est un échantillon casse.

Question : Avec k échantillons et n essais, jusqu'à quelle puissance maximale P_{max} peut-on tester, tout en étant certain d'identifier précisément la valeur de P_{lim}.

Ébauche de corrigé :

Pour tous entiers n, k, on note $P_{n,k}$ la puissance max jusqu'à laquelle on peut tester, tout en étant certain d'identifier précisément la valeur de P_{lim}.

Nous étudions la stratégie optimale qui permet d'explorer toutes les valeurs de puissance de 1 à $P_{n,k}$.

Invariance par translation

Remarquons que le problème est invariant par translation : pour un entier p quelconque, explorer les puissances allant de 1 à P revient à explorer les puissances allant de $p+1$ à $P+p$.

En effet, si on connaît une stratégie pour explorer les puissances allant de 1 à P, alors on peut appliquer cette même stratégie en la décalant simplement. Par exemple, si on teste initialement les niveaux $1, 2, 3, \ldots, P$, on peut tout aussi bien commencer les tests à $p+1, p+2, p+3, \ldots, P+p$ en utilisant la même logique pour trouver la puissance P_{lim}.

Cette invariance montre que notre approche ou stratégie de test ne dépend pas du point de départ, mais seulement de l'intervalle des puissances. Cela simplifie l'analyse et la planification des tests nécessaires pour déterminer P_{lim} avec un nombre minimal d'échantillons cassés.

Puissance du premier test

On se donne 2 entiers n et k. On s'intéresse à la stratégie optimale pour explorer les différentes puissances possibles, et en particulier à la puissance $E_{n,k}$ du premier test effectué.

Commençons par nous intéresser aux cas extrêmes :

Si $k \geq n$, alors on est uniquement contraint par le nombre d'essais n, et dans ce cas, on se ramène à une dichotomie classique. Par exemple, pour $n = 4$, on va pouvoir explorer jusque $P_{max} = 15$.
1er cas : $k = 0$
Sans échantillon, il est évident qu'on ne peut réaliser aucun essai, donc $P_{n,0} = 0$.
2nd cas : $n = 0$
De même, sans essai, on a évidemment $P_{0,k} = 0$.
On suppose désormais que $k \geq 1$ et $n \geq 1$.

Casse du premier échantillon

Si l'échantillon casse, alors $1 \leq P_{lim} \leq E_{n,k}$, et il reste alors $n-1$ essais et $k-1$ échantillons.

Il nous faut alors être en mesure explorer toutes les puissances de 1 à $E_{n,k} - 1$, si bien que nécessairement : $E_{n,k} - 1 \leq P_{n-1,k-1}$.

Dans le cas d'une inégalité stricte, on n'aurait pas choisi une solution non optimale, et donc $\boxed{E_{n,k} = P_{n-1,k-1} + 1}$ $(\star)$.

Non Casse du premier échantillon

Si l'échantillon ne casse pas, $P_{lim} > E_{n,k}$.
Il nous reste alors $n-1$ essais et k échantillons, qui nous permettent de tester, tout en étant certain d'identifier précisément P_{lim}, les puissances de 1 à $P_{n-1,k}$.
Or, $P_{lim} > E_{n,k}$, donc on peut translater cet intervalle de $E_{n,k}+1$ à $E_{n,k} + P_{n-1,k}$.
Donc : $\boxed{P_{n,k} = E_{n,k} + P_{n-1,k}}$ $(\star\star)$.

Relation de récurrence

On obtient ainsi, en combinant $(\star)$ et $(\star\star)$:

$$\forall n, k \in \mathbb{N}^*, P_{n,k} = P_{n-1,k} + P_{n-1,k-1} + 1$$

Cette relation permet de calculer toutes les valeurs $(P_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$, mais trouvons une expression explicite.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0							
2	0							
3	0							
4	0							
5	0							
6	0							
7	0							

On peut ensuite remplir le tableau en exploitant la relation de récurrence.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1	1
2	0	2	3	3	3	3	3	3
3	0	3	6	7	7	7	7	7
4	0	4	10	14	15	15	15	15
5	0	5	15	25	30	31	31	31
6	0	6	21	41	56	62	63	63
7	0	7	28	63	97	119	126	127

On remarque que pour $k \geq n$, augmenter k ne change rien, et que dans ce cas on est étonnamment proche de puissances de 2. En effet, dans le cas $k \geq n$, le nombre d'échantillon n'est pas une contrainte, et le processus de recherche de P_{lim} sera une dichotomie classique.

Ce tableau rappelle bien sûr le triangle de Pascal, qui se construit de manière similaire. Écrire le triangle de Pascal peut permettre d'identifier le lien suivant : sur une ligne donnée, la différence entre deux cases successives prend les valeurs du triangle de Pascal. En effet :

- Pour la ligne $n = 3$, on observe 3, 3, 1.
- Pour la ligne $n = 3$, on observe 4, 6, 4, 1.

On peut en déduire l'hypothèse suivante, que nous allons montrer par récurrence :

$$\forall n, k \in \mathbb{N}^*, P_{n,k} = \sum_{i=1}^{k} \binom{n}{i}$$

Pour que cette somme soit définie pour tous les entiers n et k, on précise que, si $k > n$, $\binom{n}{k} = 0$.
Vous remarquerez que la somme commence à $i = 1$, et non 0 car d'après nos observations la somme semble commencer au deuxième terme de chaque ligne du triangle de Pascal.
On pose le prédicat suivant pour $n \in \mathbb{N}$:

$$Q(n) : \forall k \in \mathbb{N},\ P_{n,k} = \sum_{i=1}^{k} \binom{n}{i}$$

Initialisation : $n = 0$

$$Q(0) : \forall k \in \mathbb{N},\ P_{0,k} = \sum_{i=1}^{k} \binom{0}{i}$$

Cette somme vaut 0 puisque tous ses termes sont nuls, et d'autre part $P_{0,k} = 0$. Donc $Q(0)$ est vrai.

Hérédité

Supposons que $Q(n-1)$ est vérifié. On a :

$$\begin{aligned}
P_{n,k} &= P_{n-1,k} + P_{n-1,k-1} + 1 \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{k} \binom{n-1}{i} + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{n-1}{i} \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{k} \binom{n-1}{i} + \sum_{i=2}^{k} \binom{n-1}{i-1} \\
&= 1 + n - 1 + \sum_{i=2}^{k} \binom{n-1}{i} + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{n-1}{i-1} \\
&= n + \sum_{i=2}^{k} \binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} \\
&= \binom{n}{1} + \sum_{i=2}^{k} \binom{n}{i} \\
&= \sum_{i=1}^{k} \binom{n}{i}
\end{aligned}$$

Donc $Q(n)$ est vrai.

Conclusion : Par principe de récurrence :

$$\forall n, k \in \mathbb{N},\ P_{n,k} = \sum_{i=1}^{k} \binom{n}{i}$$

Remarque :

Notre démonstration est constructive et nous permet aussi de mettre en place la stratégie en pratique : pour une recherche avec les paramètres n et k, le premier test, on choisit une puissance $E_{n,k} = P_{n-1,k-1} + 1$, et et on itère ensuite en fonction du résultat du test.

Problème 4 : Soit n un entier naturel. Montrer qu'il existe $2023n^3 + 42n^2 + 57$ entiers naturels consécutifs dont aucun n'est la puissance d'un nombre premier.

Ébauche de corrigé :

Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété suivante : Il existe n entiers naturels consécutifs dont aucun n'est la puissance d'un nombre premier. On va démontrer $\mathcal{P}(n)$ pour tout $n \geqslant 2$. En découlera alors naturellement la preuve du problème car $\{2023n^3 + 42n^2 + 57 \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

Méthode 1 : Cette première méthode sera une méthode constructive, quand bien même ce n'est PAS DU TOUT évident à trouver, en particulier en concours.

Considérons, pour tout $n \geqslant 2$, l'ensemble E suivant :

$$E = \left\{(n!)^2 + 2, (n!)^2 + 3, \ldots, (n!)^2 + n + 1\right\}$$

E est composé de $n-1$ entiers consécutifs dont aucun n'est la puissance d'un nombre premier. Montrons le. Supposons par l'absurde qu'il existe $k \in [\![2, n]\!]$, p premier ainsi que $m \in \mathbb{N}$ tels que $(n!)^2 + k = p^m$.

Or $k \mid (n!)^2 + k$, donc $k \mid p^m$, et comme $k > 1$ et p premier on a nécessairement qu'il existe $l \in [\![1, m]\!]$ tel que $k = p^l$.

- Si $l = m$ alors $(n!)^2 = 0$, absurde !
- Si $l < m$ alors $(n)!^2 + p^l = p^m$ entraîne $\frac{(n)!^2}{p^l} + 1 = p^{m-l}$, et en particulier :

$$p \mid \frac{(n)!^2}{p^l} + 1$$

Mais puisque $p \mid p^l \mid \frac{(n)!^2}{p^l}$, on a alors également que $p \mid 1$, absurde !

Méthode 2 : Soient $p_1, \ldots, p_{2n}$ des entiers premiers distincts. Considérons les entiers composés $k_1 = p_1p_2$, $k_2 = p_3p_4$, ..., $k_n = p_{2n-1}p_{2n}$.

Puisque les k_i, $i \in [\![1, n]\!]$, sont premiers entre eux par construction, le théorème des restes chinois assure que le système suivant possède une solution :

$$\begin{cases} k \equiv & 0 & [k_1] \\ k \equiv & -1 & [k_2] \\ & \ldots & \\ k \equiv & -(n-1) & [k_n] \end{cases}$$

Ainsi les entiers consécutifs k, $k+1$, ..., $k+n-1$ sont n entiers consécutifs, et aucun n'est la puissance d'un nombre premier car chacun est divisible par un k_i, $i \in [\![1, n]\!]$.

Méthode 3 : Soit N_n le nombre de puissances entières de $[\![1, n]\!]$. Le nombre de carrés dans $[\![1, n]\!]$ n'excède pas $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$. De la même manière le nombre de cubes dans $[\![1, n]\!]$ n'excède pas $\lfloor\sqrt[3]{n}\rfloor$, etc.

La puissance maximale m est telle que $2^m \leqslant n < 2^{m+1}$. On a donc $m = \lfloor\frac{\ln(n)}{\ln(2)}\rfloor$.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi : } N_n &\leqslant \lfloor\sqrt{n}\rfloor + \lfloor\sqrt[3]{n}\rfloor + \cdots + \lfloor\sqrt[\lfloor m\rfloor]{n}\rfloor \\ &\leqslant \sqrt{n} + \sqrt[3]{n} + \cdots + \sqrt[\lfloor m\rfloor]{n} \\ &\leqslant \lfloor m\rfloor\sqrt{n} \end{aligned}$$

Ainsi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{N_n}{n} = 0$. Et alors, le théorème des nombres premiers assure que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n + \pi(n)}{n} = 0$$

On suppose par l'absurde que l'on ne peut pas trouver n entiers consécutifs tel qu'aucun d'entre eux ne soit la puissance d'un nombre premier. Cela se traduit par $N_n \geqslant 1$, ce qui implique pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ que $N_{kn} \geqslant k$, i.e :

$$\frac{N_{kn}}{kn} \geqslant \frac{1}{n}$$

En faisant tendre k vers l'infini, on aboutit à une absurdité.